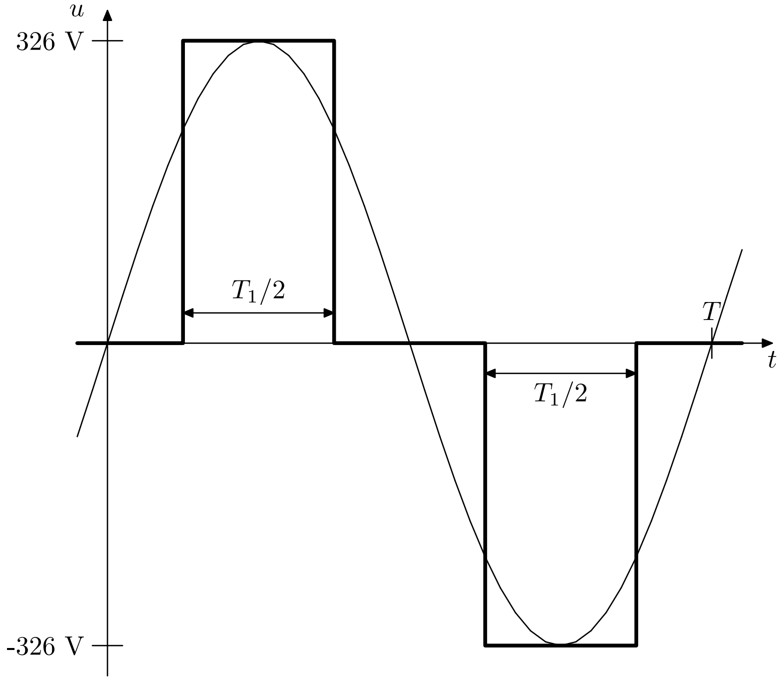
Teorie k modifikovanému sinusu

Při konstrukci autobateriového měniče síťového napětí jsem se zabýval modifikovaným sinusovým signálem. U modifikovaného sinusového síťového napětí platí, že frekvence signálu odpovídá 50 Hz, amplituda napětí je 326 V a celkové efektivní napětí je 230 V. Porovnání průběhu modifikovaného sinusu a klasického sinusového síťového napětí je na obrázku 1. Konkrétně jsem se zamýšlel nad tím, jak dlouhé musí být pulzy $T_1/2$. Jedna z věcí, kterou mi dalo studium na vysoké škole je pocit, že vzorečku, který neumím odvodit, tak úplně nevěřím. Proto jsem se hlouběji nad tímto problémem zamyslel. A vy můžete taky, bude ovšem potřeba mít alespoň základní znalosti pokročilejší matematiky, konkrétně integrálního počtu.



Obrázek 1: Porovnání průběhu síťového napětí a modifikovaného sinusu.

Začněme tedy otázkou, co je to efektivní napětí. Mějme zdroj střídavého napětí $u(t)$ s periodou T a zdroj stejnosměrného napětí U_{eff}. Na oba zdroje připojíme rezistory se stejným odporem R. Aby stejnosměrné napětí U_{eff} bylo efektivní napětím, musí platit, že práce, která se vykoná na obou rezistorech za periodu T je stejná. Neboli musí platit:

$$\int_0^T \frac{U_{eff}^2}{R}\mathrm{d}t = \int_0^T \frac{u^2(t)}{R}\mathrm{d}t\,.$$

Vycházíme z toho, že práce $W = \int_0^T P(t)\mathrm{d}t$, kde $P(t)$ je okamžitý výkon, pro který platí $P(t) = u(t)\cdot i(t) = u^2(t)/R$.

Výše uvedený vztah můžeme dále upravovat

$$\frac{1}{R}U_{eff}^2 \int_0^T \mathrm{d}t = \frac{1}{R}\int_0^T u^2(t)\mathrm{d}t$$

$$U_{eff}^2 T = \int_0^T u^2(t)\mathrm{d}t$$

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{\int_0^T u^2(t)\mathrm{d}t}{T}}$$

Pro sinusový průběh napětí $u(t) = A\sin(2\pi t/T)$, kde A je amplituda signálu, platí

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{\int_0^T A^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \mathrm{d}t}{T}}$$

použijeme substituci $z = 2\pi/Tt$, $\mathrm{d}z = T/(2\pi)\mathrm{d}t$ a tedy dále upravíme

$$U_{eff} = A\sqrt{\frac{T}{2\pi}\frac{\int_0^{2\pi} \sin^2 z \mathrm{d}z}{T}}$$

Výpočet

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 z \mathrm{d}z = \pi$$

můžeme najít v tabulkách, nicméně dá se to celkem elegantně spočítat, proto jsem výpočet dal pro zajímavost na konec tohoto textu.

Dosadíme do vztahu

$$U_{eff} = A\sqrt{\frac{T}{2\pi}\frac{\int_0^{2\pi} \sin^2 z \mathrm{d}z}{T}}$$

a dostaneme

$$U_{eff} = A\sqrt{\frac{T}{2\pi}\frac{\pi}{T}} = A\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Což je známý vztah pro sinusový signál $A = \sqrt{2}U_{eff}$.

U modifikovaného sinusu víme, že část periody $T_2 = T - T_1$ je signál nulový a část periody T_1 je signál roven amplitudě A (resp. amplitudě $-A$). Vztah

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{\int_0^T u^2(t)\mathrm{d}t}{T}}$$

tak můžeme pro modifikovaný sinus upravit

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{A^2 T_2}{T_1 + T_2}}$$

Snadno nahlédneme, že pokud $T_1 = T_2 = T/2$, tak

$$U_{eff} = A\sqrt{\frac{T/2}{T/2 + T/2}} = A\sqrt{\frac{1}{2}}$$

a modifikovaný sinus tak bude mít pro danou amplitudu stejné efektivní napětí, jako sinusový signál.

Výpočet

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 z \mathrm{d}z = \pi$$

není úplně snadný, ale dá se využít následující trik s výpočtem integrálu pomocí metody per-partes ($\int u(x)v'(x)(d)x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)(d)x$), kdy $u = \sin(z)$, $v' = \sin(z)$ a tedy $u' = \cos(z)$, $v = -\cos(z)$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 z \mathrm{d}z = [\sin(z)\cos(z)]_{z=0}^{z=2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos(z)(-\cos(z))\mathrm{d}z$$

výraz $[\sin(z)\cos(z)]_{z=0}^{z=2\pi}$ je roven nule a zároveň platí, že $\cos^2(z) = 1 - \sin^2(z)$, tedy

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 z \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} [1 - \sin^2(x)]\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}z - \int_0^{2\pi} \sin^2(x)\mathrm{d}z$$

Na vztah se můžeme podívat jako na rovnici a $-\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\mathrm{d}z$ přehodit „doleva“.

$$2\int_0^{2\pi} \sin^2 z \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}z = [z]_{z=0}^{z=2\pi} = 2\pi$$

a konečně

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 z \mathrm{d}z = \pi$$